

Vor mehr als 2500 Jahren fanden griechische Gelehrte die Grundsätze der Mathematik. Die Liebe der Hellenen zur Geometrie prägt bis heute unser Denken. Neben legendären Erkenntnissen hinterließen sie Probleme, mit denen Mathematiker noch im 19. Jahrhundert rangen.

FLUCH DER DIAGONALE

Von Ulrich Jaeger

Kleinmütig war er nicht, der Mann, dem die Idee zum größten Monument aller Zeiten zugeschrieben wird. In den Permafrostboden der russischen Tundra, so soll Carl Friedrich Gauß im 19. Jahrhundert vorgeschlagen haben, möge zum Ruhm des menschlichen Genies eine Botschaft von gigantischen Ausmaßen gegraben werden. So gewaltig, dass sie erst vom Mond aus deutlich zu lesen gewesen wäre.

Dabei lag dem Göttinger Großmeister nicht daran, sich selbst ein Denkmal zu setzen. In die Tundra sollte der Satz seines antiken Kollegen Pythagoras von Samos gestanzt werden. Der lebte zwischen

570 und 480 v. Chr. und vererbte der Nachwelt eine der meistgepackteten Formeln der Schulgeschichte.

Natürlich wusste Gauß, dass der Mann von Samos die Dreiecksregel nicht entdeckt hatte – sie war schon Jahrhunderte zuvor bekannt. Aber der Grieche zählte eben zu jener Generation von Denkern, mit denen die Morgendämmerung der Mathematik begann. Pythagoras und seinem Zeitgenossen Thales von Milet gebühren die Erstlingsrechte. Ihnen folgte in Euklid von Alexandria einer der einflussreichsten Mathematiker der westlichen Kulturgeschichte. Am hellsten aber strahlte der Stern des Archimedes von Syrakus, der von 285 bis 212 Mathematik, Physik und Technik gleichermaßen mit seinen Geniestreichen bereicherte.

Angefangen hatte die Erfolgsgeschichte mit emsiger Gelehrigkeit: Als Kaufmann bereiste Thales von Milet in der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts Babylon und Ägypten. Er studierte orientalische Rechenkunst. Die Morgenländer hantierten geschickt mit Zahlen und Gleichungen. Sie nutzten ihre Fertigkeiten, um Ernten und Vorräte zu verwalten, Land zu vermessen oder Kalenderdaten zu bestimmen.

Was Thales von Ägyptern und Babyloniern klatte und abkupferte, wuchs in seinen und den Händen seiner Nachfolger zu Unvergleichlichem – als hätten die Griechen die Rechenkunst aus einer jahrhundertelangen babylonischen Gefangenschaft erlöst.

In der Entstehung der griechischen Polis während des 7. und 6. Jahrhunderts sehen Historiker den



Nährboden dieser intellektuellen Abenteuer. Die Bürger der Stadtstaaten gelangten durch Handel zu Reichtum; Sklaven befreiten sie von Alltagsplackerei. Zur Muße, über die Welt nachzusinnen, kamen – angesichts einer Fülle konkurrierender Kultformen – die ersten Ansätze von Rationalität und wissenschaftlicher Weltanschauung.

In dieser Atmosphäre, urteilt der US-Mathematiker Dirk Struit, wurde „die moderne Mathematik geboren“: ein Denken, das nicht mehr nach dem Wie, sondern nach dem Warum fragte – und zwar auf sehr grundsätzliche Weise.

So sahen die Pythagoreer in der Zahl den Ursprung aller Erkenntnis. Zahl war ihnen alles, und alles wurde Zahl. Von der Eins aufwärts umspannte ihr säuberlich geordnetes Weltbild alle ganzen Zahlen und alle Zahlen, die sich aus dem Verhältnis ganzer Zahlen bilden ließen. Dieses unendliche Reservoir an Elementen erlaubte ihnen etwa, die Grundlagen der Musik auf Zahlen zurückzuführen. Ließ sich doch, wie sie erkannten, jedem Tonintervall ein bestimmtes Zahlenverhältnis zuordnen. Doch mochte auch Sphärenmusik ihren Himmel füllen, auf der Erde bereiteten ihnen gewöhnliche Verhältnisse die Hölle.

Da war etwa die Annahme, dass die Verhältnisse von Seitenlängen stets kommensurabel, also mit gleichem Maß messbar seien. Einem gewissen Hippasus schreibt die Legende die folgenschwere Entdeckung

FORMELN IM LABOR

In einem mittelalterlichen Codex kamen US-Spezialisten vor einigen Jahren unbekanntenen Teilen einer mathematischen Studie des Archimedes auf die Spur – hier die zerlegte Handschrift im Labor. Mit der Hilfe von Röntgenstrahlen ließ sich das Manuskript besser entziffern als bisher. Die Abhandlung zeigt, dass Archimedes auch als ein Patriarch der Kombinatorik gelten kann.



GESTÖRTE KREISE

Mit dem Ruf „Störe meine Kreise nicht!“ soll Archimedes einen römischen Soldaten angefahren haben – der den genialen Konstrukteur und Mathematiker daraufhin erschlug.

Holzstich um 1900

Der Größenmeister

So legendär Euklid geworden ist – seine „Elemente“ wären nicht denkbar gewesen ohne die Vorarbeit des Eudoxos von Knidos (um 408 bis um 347 v. Chr.). Im Austausch mit Platon und seiner Schule entwickelte der Mathematiker eine allgemeine Größenlehre und die Theorie von den Kegelschnitten. Auch eine Methode zur Bestimmung von Körperinhalten, die auf die Integralrechnung vorausweist, und eine Theorie der Planetenbewegungen gehen auf ihn zurück.

zu, dass schon die Diagonale eines Quadrats mit der Seitenlänge eins die vermeintlich harmonische Welt sprengt. Denn nach dem Satz des Pythagoras hat seine Diagonale einen Wert, dessen Quadrat der Zahl Zwei entspricht. Nur gab es im numerischen Kosmos der griechischen Antike nirgends eine Zahl, die mit sich selbst multipliziert zwei ergeben hätte.

Seinen Geistesblitz bezahlte Hippasus der Legende nach mit dem Leben. Die Pythagoreer sollen ihn, als er ihnen während einer Seefahrt von seinen Überlegungen zu inkommensurablen Verhältnissen berichtete, über Bord geworfen haben. Mag der Frevler ertrunken sein, die ihm zugeschriebene Erkenntnis lebt als „irrationale“ Zahl fort. Denn so hießen fortan Werte, für die es, wie etwa die vergebens gesuchte Wurzel aus zwei, in ihrer Welt keine Entsprechung gab.

Die Diagonalen-Frage war nicht das einzige Problem dieser Art. Vermutlich schon vor Hippasus, um 450, hatte Zenon mit seinen Paradoxa vielen Landsleuten den Appetit aufs Unendliche verdorben.

In einem seiner Hirnverdreher teilt Zenon eine Strecke. Immer wieder. Unendlich oft, bis von der Strecke nur Abschnitte ohne jede Länge bleiben. Würden diese unendlich vielen Nulllängen addiert, folgerge Zenon, habe die Resultat-Strecke die Länge null. Sollten aber die nach all der Schnippelarbeit übriggebliebenen Elemente doch irgendeine Restlänge behalten dürfen, dann führe auch das in den logischen Abgrund: Denn nun ergebe die Addition der zahllos vielen Streckenatome eine Linie unendlicher Länge.

Berüchtigt auch Zenons Geschichte von Achill und der Schildkröte. Gibt der schnelle Achill der lahmen Schildkröte im Wettlauf einen Vorsprung, führte der Logiker seinen Mathematikerkollegen vor, so vermag er das Tier nie mehr einzuholen. Langt der Recke dort an, wo die Schildkröte startete, hat die

sich ja bereits weiter bewegt – und so fort. Also könne Achill die Schildkröte nicht erreichen.

„Die Griechen“, erläutert der Mathematiker Ian Stewart, „fanden die Paradoxa niederschmetternd.“ Viele Historiker sehen in ihnen die Hauptursache für die Liebe der Hellenen zur Geometrie. Zahlen und Rechnungen allein führten in vielfältige Widersprüche. Ein Geometer aber hatte es leichter: Er konnte bei den Verhältnissen von Längen bleiben, ohne sie in exakte Werte übersetzen zu müssen.

Darum steht Euklid im Zenit der griechischen Mathematik. Irgendwann zwischen 323 und 283 v. Chr. lebte und studierte er in Alexandria, dem damaligen Mekka der Gelehrsamkeit. Mit den 13 Bänden seiner „Elemente“ wurde Euklid zum vergötterten Patriarchen der Geometrie. Über 2000 Jahre lang setzte sein kristallines Lehrgebäude den Standard für logische Argumentation. Bis ins 19. Jahrhundert prägte Euklids Klassiker den Unterricht an Schulen. Dann erst verbannten mitfühlende Lehrer das Opus aus den Ranzen ihrer Klientel: Es übersteige die geistigen Fähigkeiten Heranwachsender.

Bis in die Neuzeit versuchten aufmüpfige Zahlensforscher immer wieder, Euklid der Denkschwäche zu überführen. Im 18. Jahrhundert zählte ein Mathematiker 28 Arbeiten, deren Autoren vergebens versucht hatten, Euklid Kontra zu geben – indem sie sein berühmtes Parallelenpostulat für unnötig erklärten.

Euklid formulierte sein gigantisches Opus in einer streng logischen Folge von Definitionen, Postulaten und Axiomen. Sie werden bis heute respektiert. Euklid beschrieb die Geometrie der Ebene, behandelte die Volumen von Körpern und gab eine Übersicht der Zahlentheorie.

Dem Genie von Alexandria ist ein Beweis des pythagoreischen Satzes zu danken. Ebenso zeigte er,

dass unter allen Rechtecken von gegebenem Umfang das Quadrat die größte Fläche hat. Verblüffend auch sein Nachweis, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Diese Atome im Reich der ganzen Zahlen größer als eins, die nur durch sich selbst und eins teilbar sind, faszinieren Mathematiker bis heute. Die Erkenntnis Euklids, dass es zu jeder Primzahl eine weitere, größere – und daher unendlich viele – gibt, gilt als einer der elegantesten Beweise der Antike.

Nichts aber bewegte die Nachwelt stärker als Euklids Parallelenpostulat. Wenn eine Gerade und ein Punkt außerhalb von ihr gegeben sind, dann, so Euklid, darf sich durch diesen Punkt nur genau eine Parallele zu der Geraden ziehen lassen. Eine Linie mithin, die die erste auch dann nicht schneiden wird, wenn sie ins Unendliche verlängert würde.

Im 5. Jahrhundert n. Chr. forderte der griechische Gelehrte Proklos rundweg, diese Parallelen-Grundforderung als eine Art geistigen Müll aus Euklids Werk zu entsorgen. Die Weisheit des Alexandriners offenbarte sich, als der Göttinger Gauß und zwei seiner Zeitgenossen unabhängig voneinander eine bedeutende Entdeckung machten.

Neben der „euklidischen“ Geometrie, die Gauß' Zeitgenosse Immanuel Kant als naturgegeben ansah, lassen sich nämlich auch „nichteuklidische“ Geometrien konstruieren. In ihnen kann es entweder keine oder mehr als eine Parallele durch den Punkt abseits der Ausgangsgeraden geben. Und die Summe der Dreieckswinkel beträgt dort nicht mehr ewig gleiche 180 Grad. Dennoch sind diese sonderbaren Welten in sich so widerspruchsfrei wie Euklids Geometrie.

Auf der Grundlage euklidischen Wissens konnten seine Nachfolger weiterbauen. Wohl der bedeutendste unter ihnen war Archimedes. Geboren in Syrakus auf Sizilien, hatte auch er in Alexandria studiert. Seine Zeitgenossen, notierte der vielseitige Biograf und Moralist Plutarch um 100 n. Chr., bestaunten in ihm „übermenschlichen Scharfsinn“. Die Verehrung währt bis heute, revolutionierte der Ratgeber des antiken Königs Hieron doch nicht nur die Mathematik. Auch der Physik schenkte er bedeutende Einsichten; obendrein konstruierte er Kriegsmaschinen, die Zeitgenossen erschauern ließen.

Der Entdecker der Hebelgesetze war ein selbstbewusster Mann: Ohne weiteres könne er die Welt aus den Angeln heben, belehrte der Halbgott seine staunende Gemeinde. Alles, was er brauche, sei ein fester Punkt außerhalb der Erde.

Die ließ Archimedes mangels Fixpunkt dann zwar unbehelligt, doch dafür setzte er feindlichen Kriegsschiffen zu. Er konstruierte Katapulte, die Schiffe kanonengleich versenken konnten. Den Hafen von Syrakus soll er mit Hebelkräften und einer Klaue geschützt haben. Lief ein Feindschiff ein, so hob die Klauenmechanik es mit dem Bug voran aus dem Wasser – um es dann den zerschmetternden Gewalten der Schwerkraft zu überlassen.

Legende ist sein Ausruf „Heureka“, „Ich hab's“. Mit diesem Schrei, heißt es, sprang Archimedes aus dem Bad und lief auf die belebte Straße, als er erkannt hatte, dass ein in Wasser eingetauchter Körper scheinbar um so viel leichter wird, wie das Wasser wiegt, das er verdrängt.

Keine triviale Erkenntnis, hängt sie doch damit zusammen, Materialien ein „spezifisches Gewicht“, eine Dichte zuzuordnen. Das nutzte Archimedes so gleich, um einen königlichen Goldschmied des Be-

trugs zu überführen. Der hatte aus dem Edelmetall eine Krone fertigen sollen – dabei aber insgeheim Gold mit dem weniger wertvollen Silber vermischt. Sobald Archimedes klar war, dass Gold eine höhere Dichte als Silber hat, konnte er den Verdacht gegen den Schmied bestätigen.

Unbekümmert von Zenons Paradoxa und irrationalen Zahlen werkelte der Überflieger auch im Reich der Mathematik. Es war Archimedes, der mit genialer Annäherungsmethode die Kreiszahl Pi bestimmte. Dazu baute er in einen Kreis ein Vieleck ein. Ein zweites legte er um den Kreis. Das innere war kleiner, das äußere größer als die Fläche des Kreises, die ein Produkt aus Pi und dem Quadrat des Radius ist. Je höher Archimedes nun die Anzahl der Ecken seiner Hilfsfiguren wählte, desto präziser konnte er Pi eingrenzen.

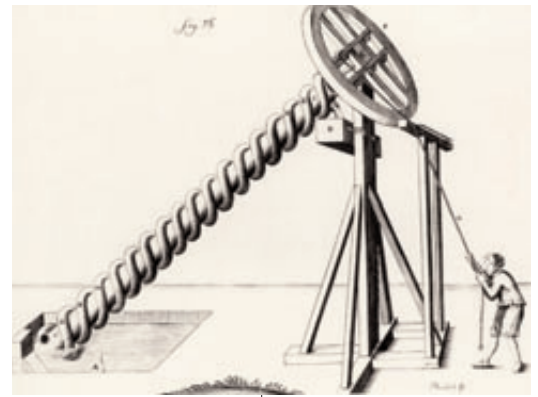
Forscher nehmen heute an, dass Archimedes sich auch des Unendlichen bediente. Vermutlich ging er schon mit einer Vorform der von Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz im 17. Jahrhundert entwickelten Infinitesimalrechnung um. Ein solches Kalkül wäre bei seinen Großtaten von äußerstem Nutzen gewesen. So zeigt Archimedes, dass das Volumen einer Kugel, die eben noch in eine zylindrische Röhre gepasst werden kann, zwei Drittel des Rauminhalts dieser Zylinderform ausmacht.

Unter seinen Leistungen galt ihm diese als bedeutendste. Archimedes verfügte, Kugel und Zylinder auf seinen Grabstein zu setzen. Schon als der römische Staatsmann Cicero im 1. Jahrhundert v. Chr. als Finanzbeamter in Sizilien war, fand er das überwachsene Grab des Genies anhand dieses Hinweises.

Selbst seinen Tod fanden die Historiker berichtenswert: Als ein römischer Soldat den Theoretiker dabei unterbrach, wie er im Sand Figuren zeichnete, soll Archimedes zornig gerufen haben: „Störe meine Kreise nicht!“ Darauf erschlug der bornierte Römer den großen Formeldenker.

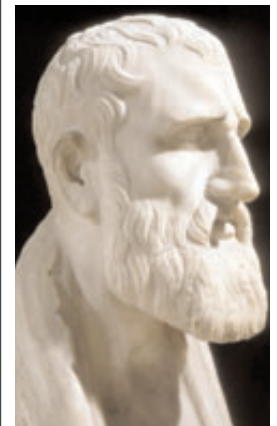
Archimedes' Genie aber spricht noch heute aus dem Grab. Erst vor wenigen Jahren legten Forscher unter den Inschriften eines Gebetbuchs aus dem 13. Jahrhundert Archimedes-Texte frei. In der neuentzifferten „Stomachion“-Abhandlung fand sich eine Art Denkspiel. Es verlangt, elf Dreiecke, zwei unregelmäßige Vierecke und ein Fünfeck zu einem Quadrat zu legen – ähnlich dem als „Tangram“ bekannten Formenspiel. Nun ging es Archimedes nicht um kindliche Puzzelei. Vielmehr sehen Mathematiker in der Geduldsübung den Beleg für eine weitere Pioniertat: die Entdeckung der Grundlagen der Kombinatorik, einer erst in der Neuzeit gewachsenen mathematischen Disziplin.

Kombinatoriker fragen danach, wie viele Lösungen ein bestimmtes Problem hat. Im Falle des zerlegten Quadrats, so ermittelten Mathematiker, gibt es 17152 Möglichkeiten, die gegebenen Steine zum Quadrat zusammenzufügen. Kannte der Meister die Lösung? „Ich bin sicher, er hat es gelöst“, glaubt Reviel Netz aus Stanford, einer der Stomachion-Auswerter. „Andernfalls hätte Archimedes es nicht in seine Schriften aufgenommen.“



WASSER FLIESST HINAUF
Antike Technikfachleute schrieben dem Archimedes die Erfindung der Wasserschraube zu, mit der Flüssigkeiten kontinuierlich aufwärts bewegt werden können.

Stich von 1719



GEISTIGER QUERTREIBER
Mit seinen Paradoxen trieb der Philosoph Zenon von Elea seine Landsleute zur Verzweiflung – weil ihnen die Möglichkeit versagt war, mit unendlichen Größen zu rechnen.

Archäologisches Nationalmuseum, Neapel