

MATHEMATIK

Atome der Zahlenwelt

Gibt es unendlich viele Primzahl-Zwillinge? Über das Internet versuchen Gelehrte das jahrtausendealte Rätsel zu lösen – mit spektakulärem Erfolg.

Warum ausgerechnet 70 Millionen? Mit dieser Frage fing alles an. Was folgte, war eine der erstaunlichen Entdeckungsgeschichten der modernen Mathematik.

Ins Rollen brachte sie ein 57-Jähriger, dessen Name in der Fachwelt bis dahin unbekannt war. Jahrelang hatte sich Yitang Zhang als Motel-Angestellter oder Lieferservice-Fahrer durchs Leben geschlagen. Irgendwann ergatterte er dann eine schlechtdotierte Anstellung als Dozent der University of New Hampshire.

Dann aber, am 14. Mai vorigen Jahres, setzte Zhang die Sache mit den 70 Millionen in die Welt. Und über Nacht war er berühmt. Die ehrwürdige Harvard University lud ihn zu einem Vortrag ein. Das legendäre Institute for Advanced Study in Princeton bot ihm gar eine Stelle als Gastwissenschaftler an.

Den plötzlichen Ruhm verdankt Yitang Zhang einem Artikel, der in den „Annals of Mathematics“ erscheint. Er geht darin das Rätsel der Primzahl-Zwillinge an, das die Mathematiker schon seit gut 2000 Jahren beschäftigt.

Primzahlen sind Zahlen, die – wie 7, 23 oder 109 – nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. Da sich jede natürliche Zahl als Produkt von Primzahlen darstellen lässt, gelten diese gleichsam als Atome der Zahlenwelt. Chaotisch, geradezu willkürlich scheinen sie auf dem Zahlenstrahl verteilt. Die geheimen Regeln aufzuklären, denen dieses Muster gehorcht, gilt als vielleicht größte Herausforderung der Mathematik.

So grübeln die Forscher zum Beispiel darüber, wie viele Paare von Primzahlen es wohl gibt, die – wie 5 und 7 oder 17 und 19 – unmittelbar aufeinander folgen (nur unterbrochen durch eine gerade Zahl dazwischen). Viele Nächte haben die größten Geister des Fachs damit verbracht, nach solchen Primzahl-Zwillingen zu fahnden, und einige von schwindelnder Größe haben sie dabei aufgespürt. Den Rekord hält ein Paar, dessen Ziffernfolge aufzuschreiben gut 50 SPIEGEL-Seiten füllen würde.

Doch gibt es zu jedem solchen Pärchen ein weiteres, das noch größer ist? Schon

Euklid mutmaßte, dass die Antwort „ja“ lauten müsste. Doch ob es stimmt, wissen die Gelehrten bis heute nicht.

Zhang brachte sie ein großes Stück weiter. Zwar gelang es auch ihm nicht, das Zwillingenproblem zu knacken; doch konnte er beweisen, dass es beliebig viele Primzahlpaare gibt, die um nicht mehr als 70 Millionen Zahlen auseinanderliegen. Der Dozent aus New Hampshire ersann dazu eine Art Riesenkamm: 70 Millionen Zahlen breit ist dieser, und er hat raffiniert angeordnete Zinken. Zhang hat bewiesen: Gleichgültig, wo am Zahlenstrang er diesen Kamm ansetzt, zeigen mindestens zwei der Zinken auf Primzahlen.

In Mathematikerkreisen wurde Zhangs Beweis als Sensation bejubelt. Doch mehr noch verstand man ihn als Provokation: Warum hatte Zhang ausgerechnet diesen Kamm verwendet? Würde ein kleinerer,

Unendliche Welten

Das „Polymath8“-Projekt der Primzahlforscher

14. Mai 2013
Yitang Zhang beweist, dass es unendlich viele Primzahlpaare gibt mit dem Maximalabstand von

70 000 000

Nach der Veröffentlichung wetteifern Mathematiker miteinander, diesen Abstand zu verkleinern.

3. Juni
4 982 086

5. Juni
3 899 222

15. Juni
607 64

27. Juli
4 680

19. November
600 (erzielt mit einer neuen Methode von James Maynard)

6. Januar 2014
270

Ziel ist ein Beweis dafür, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt. Deren Abstand beträgt:

2



hinreichend raffiniert konstruierter Kamm nicht genauso gute Dienste leisten?

Kaum 14 Tage nachdem Zhangs Artikel online war, legte ein Australier nach und drückte die Obergrenze von 70 Millionen auf 60 Millionen. Zwei Tage später reagierte ein weiterer Kollege: „Ich kann nicht widerstehen“, verkündete er im Netz – und senkte den magischen Wert ein weiteres Mal, diesmal auf 59 470 640.

Es entbrannte ein Wettstreit, der die Mathematiker bis heute in Atem hält. Flugs war eine Internetplattform entstanden, auf der Meldungen aus aller Welt eintrudelten. Und jeder hatte Ideen, wie sich der Zahlenkamm weiter verbessern lasse.

Mal steuerte Xiao-Feng Xie einen Vorschlag bei, ein Robotikexperte aus Pittsburgh. Mal meldete sich Terence Tao aus Los Angeles, den einige für den brillantesten aller lebenden Mathematiker halten. Wieder andere Anregungen kamen von einem Anonymus, der sich nur als v08ltn zu erkennen gab.

„Mitunter purzelte der Wert für die Primzahl-Lücke im Stundentakt“, erzählt Andrew Sutherland vom MIT, der sich als besonders einfallreicher Meister der Kamm-Konstruktion hervortat. „Manchmal hatte ich um zwei Uhr morgens eine Idee, die ich unbedingt sofort posten musste.“

Gut zwei Monate währte das Spektakel, dann steckte das Unterfangen fest. Der Zahlenkamm war auf eine Länge von 4680 geschrumpft, aber nun waren den Primzahl-Bastlern die Ideen ausgegangen.

Man einigte sich darauf, in einem gemeinsamen Artikel Fazit zu ziehen. In der Autorenzeile prangt der Name „D.H.J. Polymath“ – der wohl erste virtuelle Wissenschaftler der Forschungsgeschichte.

Das Wettrennen um den kleinsten Primzahl-Kamm war damit nicht beendet. Vielmehr eröffnete James Maynard, ein junger Zahlentheoretiker aus Montreal, umgehend eine zweite Runde. Unabhängig von der Internetgemeinde hatte er ein anderes Verfahren ausgetüftelt, das Zwillingenrätsel anzupacken. Auf einen Schlag war es ihm so gelungen, die Lücke auf nur noch 600 zu verkleinern.

Gierig stürzte sich die Polymath-Meute auf die neue Beute, denn auch Maynards Methode ließ sich noch verbessern. 576 – 330 – 270: Wieder purzelten die Rekorde.

Noch ist das virtuelle Mathe-Genie nicht an seine Grenze gekommen, aber die Fortschritte werden kleiner. Nur noch 252 Zahlen breit ist der derzeit beste Kamm. „Viel besser geht es vermutlich nicht“, meint MIT-Forscher Sutherland.

Um den Wert bis auf 2 zu drücken – dann erst wäre das euklidische Zwillingenproblem wirklich geknackt –, bedürfte es eines Geistesblitzes, der einen ganz neuen Weg eröffnet.

Ob Polymath auch dazu fähig ist?

JOHANN GROLLE