

Befreundete Kurven

Zahlenkunde Eine neue Datenbank läutet die Ära von Big Data in der Mathematik ein. Die Gelehrten wollen damit eine Weltformel ihres Fachs finden.

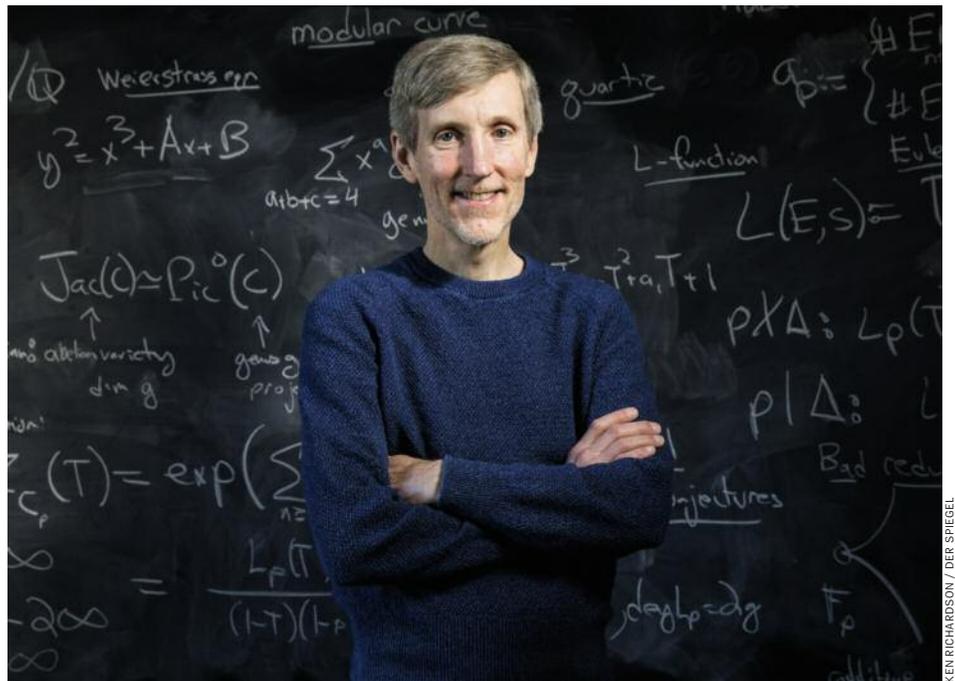
Für gewöhnlich neigen Mathematiker nicht zum Überschwang. Diesmal aber versetzte die Begeisterung sie ins Metaphern-Delirium: Die einen sprachen vom „Rosettastein“ des Zahlenreichs, die anderen von einem mathematischen „Periodensystem“. Der Direktor des American Institute of Mathematics verkündete: „Wir kartieren die Mathematik des 21. Jahrhunderts.“ Es gehe um nichts weniger als eine Art Weltformel seines Fachs.

Und was war es, das diese Euphorie entfachte? Es handelte sich schlicht um die Inbetriebnahme einer Datenbank, die auch noch den prosaischen Namen LMFDB trägt („L-functions and Modular Forms Database“). Seit wenigen Tagen hat die Gemeinde der Mathematiker unter der Webadresse www.lmfdb.org Zugriff auf ein gigantisches Konvolut an Zahlen. Myriaden von mathematischen Objekten sind darin aufgeführt, mit einer unermesslichen Zahl von Koeffizienten.

Normalsterblichen muss wohl unverständlich bleiben, warum dieses Sammelurium an Zahlen Mathematiker weltweit dermaßen in Verückung versetzt. Wer aber zumindest eine vage Ahnung davon bekommen will, der muss sich mit jenen Objekten befassen, die im Zentrum der neuen Datenbank stehen: den sogenannten L-Funktionen. Es sind dies mysteriöse Gebilde, deren wundersame Eigenschaften die Gelehrten schon seit anderthalb Jahrhunderten in ihren Bann ziehen.

Es war der vielleicht bedeutendste Durchbruch in der Zahlentheorie des 20. Jahrhunderts, als der Brite Andrew Wiles 1995 nachwies, dass L-Funktionen Geheimgängen gleichen, die zwei völlig unterschiedlich erscheinende Bereiche der Mathematik miteinander verbinden. In der Fachwelt geht seither die Hoffnung um, dass dies nur der Anfang war: Die Forscher trauen den L-Funktionen noch mehr zu. Dereinst, so die Vision, könnten sich große Teile der Mathematik als Gesamtgebäude erweisen, das in seinem Innern aufs Engste mittels L-Funktionen verstrebt ist.

L-Funktionen aber sind nicht leicht zu finden. Vielfach hatten sich die Wissenschaftler deshalb darauf beschränkt, nur



Datenbank-Mitbegründer Sutherland: Nach Herzenslust im Wald der Zahlen spazieren gehen

die abstrakten Eigenschaften dieser faszinierenden Objekte zu untersuchen. Kaum mehr als ein Dutzend von ihnen hatten sie berechnet und veröffentlicht. Dies hat nun die neue Datenbank radikal geändert. In einer gewaltigen Anstrengung haben die gut 80 beteiligten Mathematiker die Zahl der explizit berechneten L-Funktionen mit einem Schlag auf 20 Millionen erhöht.

Die Väter der LMFDB machen damit ihren Kollegen einen enormen Datensatz verfügbar, an dem diese ihre Intuition schulen können. Nach Herzenslust dürfen die Forscher nun im Wald der Zahlen spazieren gehen und nach überraschenden Zusammenhängen suchen. Erleichtert werden die Expeditionen durchs Zahlenreich durch ein komplexes Netzwerk von Verbindungen auf der LMFDB-Website: Modulformen, elliptische Kurven, Zahlkörper und andere höchst abstrakte Objekte sind darin durch „Freundschaften“ miteinander verbunden. Die Begründer der Datenbank sprechen von einem „Facebook der Mathematik“.

Andrew Sutherland vom MIT bei Boston ist einer von ihnen. Seit 2011 arbeitet er mit am Aufbau des großen Zahlen- und Formelwerks. Seine eigene Forschung sei bestes Beispiel dafür, wie viele Erkenntnisse das Studium der Datenbank zutage fördern könne, sagt er: „Fast alles, was ich in den letzten fünf Jahren veröffentlicht habe, ist Ausfluss der LMFDB.“

Die Mathematik tritt so in die Ära von Big Data ein. Als falsch erweist sich die Legende, dass Mathematiker gar nicht wirklich rechneten. Einem verbreiteten Vorurteil zufolge interessieren sie sich gar nicht für die Lösungen von Gleichungen, sondern ausschließlich dafür, ob es Lösungen gibt. „Für viele Bereiche der Mathematik mag das zutreffen“, sagt Sutherland. Ein wachsender Teil seines Fachs sei je-

doch auf harte Rechenarbeit gegründet: „In der LMFDB stecken rund tausend Jahre Computer-Rechenzeit.“

Sutherland selbst übernahm das härteste Stück Rechnerei. Er nahm sich die 66 000 kompliziertesten der L-Funktionen vor. Berechnen konnte er sie nur, indem er 72 000 Prozessorkerne ein ganzes Wochenende lang beschäftigte. „So viel Rechenzeit kriegen Sie in keinem Forschungszentrum“, sagt Sutherland. Stattdessen musste er Cloudcomputer von Google mieten.

Eine Vorstellung von der Bedeutung, die solche Berechnungen künftig erlangen könnten, mag die Tatsache vermitteln, dass schon die einfachste aller L-Funktionen voller Geheimnisse steckt. Sie trägt den Namen Riemannsche Zetafunktion, und sie spielt in der Zahlentheorie eine geradezu mythische Rolle.

Schon 1859 äußerte der deutsche Mathematiker Bernhard Riemann den Verdacht, dass diese Funktion das Rätsel der Primzahlen in sich birgt. Weil aber die Primzahlen gleichsam die Rolle der Elementarteilchen des Zahlenreichs spielen, gilt die Riemannsche Zetafunktion als ultimatives Instrument, um den Zahlen ihre tiefsten Geheimnisse zu entlocken.

Auch nach 157 Jahren intensiver Bemühungen ist die Riemannsche Vermutung unbewiesen. Sollte der Beweis jedoch je gelingen, würde dies überwältigende Einblicke in noch unerschlossene Gefilde der Mathematik eröffnen. Fast einhellig betrachten Mathematiker diesen Beweis als größte Herausforderung ihrer Zukunft.

All das betrifft, wie gesagt, nur die einfachste aller L-Funktionen. Jede andere dieser unheimlichen Gebilde gehorcht entsprechend geheimnisvollen Gesetzen, die zu beweisen ähnlich bedeutungsvoll wäre.

Die neue Datenbank aber gibt den Forschern präzise Details über 20 Millionen von ihnen an die Hand.

Johann Grolle